Correction Devoir maison n°16

Exercice 1

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I. Une première expérience aléatoire

1. Si l'événement C_1 est réalisé, on effectue les tirages dans l'urne U_1 qui contient une boule noire. On note B_i l'évènement "on tire une boule blanche au i-ème tirage" et N_i l'évènement "on tire une boule noire au i-ème tirage". On a alors

$$\begin{aligned}
P_{C_1}(Y=j) &= P_{C_1}\left(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j\right) \\
&= P_{C_1}(B_1) \times P_{C_1 \cap B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{C_1 \cap B_1 \cap \ldots \cap B_{j-1}}(N_j) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-j+1}{N-j+2} \times \frac{1}{N-j+1}
\end{aligned}$$

Après simplification on a bien,

$$\boxed{P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.}$$

2. Lorsqu'on effectue des tirages dans l'urne U_2 qui ne contient que des boules blanches, on est sûr d'être dans l'urne U_2 que lorsque toutes les boules ont été tirées. Ainsi,

$$\boxed{P_{C_2}(Y=j) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant N-1}$$

et

$$\boxed{P_{C_2}(Y=N) = 1}$$

3. (C_2, C_1) forme un système complet d'événement donc à l'aide de la formule des probabilités totales,

$$P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) + P_{C_2}(Y=j)P(C_2).$$

— Si $1 \leqslant j \leqslant N$, $P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) + 0 = \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{2}$

— Si $j = N$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\underline{\text{Bilan :}}\ P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j \in [\![1, N_1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j = N \end{cases}}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} jP(Y=j) + NP(Y=N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{(N-1)N}{2} \times \frac{1}{2N} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{N-1}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{E(Y) = \frac{3N+1}{4}}$$

II. Une seconde expérience aléatoire

1. $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.
2. Soit $k \geqslant 2$.

$$P(T = k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

Or les tirages s'effectuent ici avec remise donc les événements B_i et N_j sont indépendants ; ainsi :

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(B_1)P(B_2)\ldots P(B_{k-1})P(B_k) + P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_{k-1})P(B_k) \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-1}{N}. \end{aligned}$$

3. T admet une espérance ssi $\sum kP(T = k)$ converge absolument autrement dit ssi $\sum kP(T = k)$ converge car T est à valeurs positives.

Sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît ici des séries dérivées de séries géométriques qui convergent car $\left|\frac{1}{N}\right| < 1$ et $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$. Ainsi, T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{N}\left(\left(\frac{1}{1-\frac{N-1}{N}}\right)^2 - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\left(\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\right)^2 - 1\right) \\ &= \frac{1}{N}(N^2 - 1) + \frac{N-1}{N}\left(\left(\frac{N}{N-1}\right)^2 - 1\right) \\ &= N + \frac{N}{N-1} - \frac{1}{N} - \frac{N-1}{N} \\ &= N + \frac{N}{N-1} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(T) = N + \frac{1}{N-1}}$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned} P(U=1\cap T=2) &= P(B_1\cap N_2)+P(N_1\cap B_2)\\ &= \frac{N-1}{N}\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(U=1\cap T=2)=\frac{2(N-1)}{N^2}.}$$

(b) Soit $k\geqslant 3$. Les évènements étant indépendants

$$\begin{aligned} P(U=1\cap T=k) &= P(N_1\cap ...\cap N_{k-1}\cap B_k)\\ &= \frac{1}{N^{k-1}}\frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{P(U=1\cap T=k)=\frac{N-1}{N^k}.}$$

5. (a) On a

$$P([U=j]\cap[T=j+1])=P\left(B_1\cap\ldots\cap B_j\cap N_{j+1}\right)$$

$$\boxed{P\left([U=j]\cap[T=j+1]\right)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^j\times\frac{1}{N}.}$$

(b) $P([U=j]\cap[T=k])=0$ si $k\neq j+1$ car $U=j$ signifie que l'on a obtenu j boules blanches avant d'obtenir au moins une boule de chaque couleur donc nécessairement la $j+1$ ième est noire donc $T=j+1$.

6. $P(U=1)=P(U=1\cap T=2)=\dfrac{2(N-1)}{N^2}$ donc $P(U=1)P(T=2)\neq P(U=1\cap T=2)$. Ainsi, U et T ne sont pas indépendantes.

7. $U(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\{(T=k),k\in[\![2;+\infty[\![\}$ on a :

$$\begin{aligned} P(U=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty}P(U=1\cap T=k)\\ &= \frac{2(N-1)}{N^2}+\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{N-1}{N^k} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(U=1) &= \frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N^3}\frac{1}{1-1/N}\\ &= \frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{1}{N^2}\\ &= \frac{2N-1}{N^2} \end{aligned}$$

et $\forall j\geqslant 2$

$$\boxed{P(U=j)=P(U=j\cap T=j+1)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.}$$

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$
Par ailleurs,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$
et, par croissances comparées,
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a montré précédemment que la fonction f est de classa $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. On a alors
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x-(x-1)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} > 0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe.}}$$

3. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc :
$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur }]0,+\infty[\text{ : } a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$$

4. On a
$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$
$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$
La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc :
$$\boxed{b \in [2;4].}$$

Partie II : Étude d'une suite

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
   Initialisation : Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$
   Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc
   $$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$
   Ainsi,
   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
   En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient
   $$\ell = \ln(\ell) + 2$$
   ou encore
   $$f(\ell) = 2.$$
   Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = b.}$$
3. (a) Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a
   $$g'(x) = \frac{1}{x}.$$
   Alors, puisque $b \geq 2$, on a :
   $$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$
   En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
   La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$
   Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \tfrac{1}{2}(u_n - b).}$$

(b) La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $b \in [2;4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \tfrac{1}{2^{n-1}}.}$$

4. (a) Nous proposons la fonction suivante :

```
function u = suite(n)
u = 4
for i=1:n
u = log(u)+2
end
endfunction
```

(b) Nous nous appuyons ici sur la question **4.a** :

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
n = 0
while (1/2^(n-1) > epsilon)
n = n+1
end
b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x)\\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}\\ &= \frac{2}{(2x-\ln(2x))} - \frac{1}{(x-\ln(x))}\\ &= \frac{2(x-\ln(x)) - (2x-\ln(2x))}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}\\ &= \frac{2x-2\ln(x)-2x+\ln(2x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}\\ &= \frac{-2\ln(x)+\ln(2)+\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}.}$$

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

3. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$$

4. (a) En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \Phi(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ avec } \Phi(0) = 0.}$$

(b) Soit $x > 0$. On a

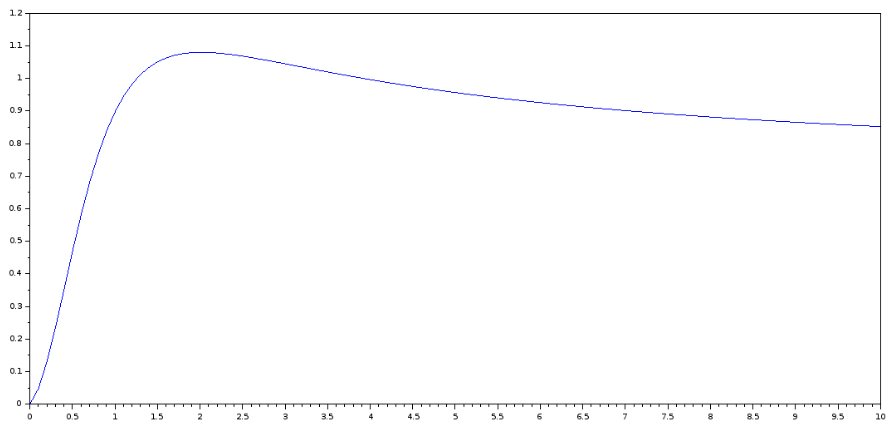
$$\Phi'(x) \underset{x:0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \xrightarrow[x:0^+]{} 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi'(x) \xrightarrow[x:0^+]{} 0.}$$

5. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :
   — Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;
   — Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;
   — Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

   On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie I

1. En faisant un seul tirage, on obtient forcément un seul numéro.
   Donc $\boxed{Z_1 \text{ est la variable aléatoire certaine égale à } 1}$. D'où $\boxed{E(Z_1) = 1}$.

   En faisant 2 tirages, on peut obtenir soit 2 numéros différents, soit 2 fois le même numéro. L'événement $Z_2 = 1$ signifie qu'au deuxième tirage, on retire la même boule qu'au premier tirage, ce qui a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'arriver. On a donc $P(Z_2 = 1) = \frac{1}{n}$.
   On a donc également $P(Z_2 = 2) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

On peut résumer dans un tableau :

i	1	2
$P(Z_2 = i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

On a donc $E(Z_2) = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{n-1}{n} \times 2$, i.e $\boxed{E(Z_2) = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}}$.

2. (a) L'événement $Z_k = 1$ signifie qu'on tire k fois la même boule. Il y a n possibilités (soit on tire toujours la boule n° 1, soit toujours la boule n° 2, ... , soit toujours la boule n° n). Or, en tout, il y a n^k suites de tirages possibles (n possibilités pour chacun des k tirages). Comme il y a équiprobabilité, on en déduit :

$$\boxed{P(Z_k = 1) = \frac{n}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

Pour l'événement $Z_k = k$, on distingue deux cas :

— Si $k > n$, on ne peut obtenir au maximum que n résultats différents. Donc l'événement $Z_k = k$ est impossible :

$$\boxed{P(Z_k = k) = 0 \quad \text{si } k > n}$$

— Si $k \leqslant n$, on dénombre. L'événement $Z_k = k$ signifie qu'on a tiré des boules toutes différentes. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités pour cela. En effet, il y a n possibilités pour la première boule, puis $n-1$ pour la deuxième (qui doit être différente de la première), ... , puis $n-k+1$ pour la k-ième (qui doit être différente des $k-1$ premières). Ce qui fait en tout $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. Et en tout, il y a toujours n^k suites de tirages possibles. D'où :

$$\boxed{P(Z_k = k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!} \quad \text{si } k \leqslant n}$$

(b) Soit $\ell \in [\![1; n]\!]$. L'événement $Z_{k+1} = \ell$ signifie qu'en faisant $k+1$ tirages, on obtient ℓ numéros différents. Et ceci peut se produire de deux manières différentes :

— Soit on avait déjà ℓ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un numéro qu'on avait déjà tiré précédemment.

— Soit on avait $\ell - 1$ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un des $n - (\ell - 1)$ numéros qu'on n'avait encore jamais tirés.

D'où :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = \ell) &= P_{Z_k=\ell}(Z_{k+1} = \ell) P(Z_k = \ell) + P_{Z_k=\ell-1}(Z_{k+1} = \ell) P(Z_k = \ell - 1) \\ &= \frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n - (\ell - 1)}{n} P(Z_k = \ell - 1) \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n} P(Z_k = \ell - 1)}$$

(c) On calcule $E(Z_{k+1})$ en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Z_{k+1}=\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n} P(Z_k=\ell) + \frac{\ell(n-\ell+1)}{n} P(Z_k=\ell-1) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n} P(Z_k=\ell) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n} P(Z_k=\ell-1) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n} P(Z_k=\ell) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)(n-j)}{n} P(Z_k=j) \quad \text{(changement d'indice } j=\ell-1\text{)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n} P(Z_k=\ell) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(j+1)(n-j)}{n} P(Z_k=j) \quad \text{(car } P(Z_k=0)=0\text{)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(Z_k=\ell) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} (-j^2+nj-j+n) P(Z_k=j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(Z_k=\ell) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(Z_k=j) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j) \\
&\qquad + \frac{n}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k=j) \qquad \text{(on développe la deuxième somme)}
\end{aligned}$$

Or, les deux premières sommes se simplifient : il ne reste que le terme $\ell = n$ de la première somme :

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1}) &= \frac{1}{n} \times n^2 P(Z_k=n) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j) + \sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k=j) \\
&= nP(Z_k=n) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j) + \sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k=j)
\end{aligned}$$

Or, ceci est égal à $\displaystyle\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(Z_k=j) + \sum_{j=1}^{n} P(Z_k=j)$. (si on isole le terme $j=n$ dans chaque somme, on retombe bien sur ce qui précède). Comme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} jP(Z_k=j) = E(Z_k)$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(Z_k=j) = 1$, on en déduit :

$$\boxed{E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1}$$

3. (a) Pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= E(Z_{k+1}) - n \\
&= \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1 - n \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{n-1}{n}E(Z_k) - (n-1) \\
&= \frac{n-1}{n}\Big(E(Z_k) - n\Big) \\
&= \frac{n-1}{n}v_k
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } (v_k)_{k\geqslant 1} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$

(b) On déduit de la question précédente que pour tout $k \geqslant 1$, $v_k = v_1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$. Or, $v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$.
Donc, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_k &= (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \\ &= -(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \\ &= -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} \end{aligned}$$

Or, $E(Z_k) = n + v_k$. Donc $E(Z_k) = n - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$, ce qui donne bien :

$$\boxed{E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

Partie II

1. On a vu au I.2.(a) que $P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$. Donc ici $\boxed{P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{4^{k-1}}}$.
   En tirant des boules numérotées de 1 à 4 on ne pourra jamais obtenir strictement plus que 4 numéros différents. Donc $\boxed{P(Z_k \geqslant 5) = 0}$.

2. L'événement $Z_k = 2$ signifie qu'on tire exactement 2 numéros différents au cours des k tirages. On dénombre : il y a $\binom{4}{2} = 6$ paires de numéros possibles. Et une fois les 2 numéros fixées (appelons-les a et b), il y a $2^k - 2$ suites de tirages possibles où on tire exactement ces 2 numéros. En effet, il y a 2 possibilités pour chacun des k tirages (soit on tire le numéro a, soit le numéro b). Ce qui fait 2^k possibilités, auxquelles il faut en enlever 2 : « on tire uniquement le numéro a » et « on tire uniquement le numéro b » (sinon $Z_k = 1$). Comme le nombre total de possibilités est 4^k (4 possibilités à chacun des k tirages) :

$$\boxed{P(Z_k = 2) = 6\frac{2^k - 2}{4^k}}$$

   Remarque : On pouvait aussi le faire sans dénombrement. En effet, d'après le II.2.(b), avec $\ell = 2$ et $n = 4$, on a $P(Z_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Z_k = 2) + \frac{3}{4}P(Z_k = 1)$, i.e $P(Z_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Z_k = 2) + \frac{3}{4^k}$ d'après la question précédente. Ceci permet alors de démontrer la formule par récurrence sur k.

3. (a) L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ signifie qu'au moins une des 4 boules n'est jamais tirée au cours des k premiers tirages, c'est-à-dire :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

   D'après la formule du crible, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Z_k \leqslant 3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) \\ & - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) \\ & - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ & + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Or, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$ car les boules jouent toutes le même rôle. De même, les probabilités des 6 intersections 2 à 2 sont égales, et les 4 probabilités d'intersections 3 à 3 aussi. Donc :

$$P(Z_k \leqslant 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Comme $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ (on est obligé de tirer au moins une des 4 boules), on a :

$$\boxed{P(Z_k \leqslant 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

(b) L'événement A_1 signifie qu'à chaque tirage, on tire la boule 2 ou la boule 3 ou la boule 4, ce qui fait 3^k suites de tirages possibles (3 possibilités pour chacun des k tirages). Comme il y a en tout 4^k suite de tirages possibles, on en déduit que $\boxed{P(A_1) = \frac{3^k}{4^k}}$.

De même, l'événement $A_1 \cap A_2$ signifie qu'à chaque tirage, on tire la boule 3 ou la boule 4, ce qui fait 2^k suites de tirages possibles. D'où $\boxed{P(A_1 \cap A_2) = \frac{2^k}{4^k} = \frac{1}{2^k}}$.

Enfin, l'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ signifie qu'on tire la boule numéro 4 à chaque tirage, ce qui fait 1 suite de tirages possibles.

D'où $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4^k}}$

(c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\boxed{P(Z_k \leqslant 3) = \frac{4 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 4}{4^k}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(Z_k = 3) &= P(Z_k \leqslant 3) - P(Z_k = 2) - P(Z_k = 1) \\ &= \frac{4 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 4}{4^k} - 6\frac{2^k - 2}{4^k} - \frac{4}{4^k} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{P(Z_k = 3) = \frac{4 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k + 12}{4^k} = \frac{3^k - 3 \cdot 2^k + 3}{4^{k-1}}}$$

Enfin, comme Z_k est toujours inférieur ou égal à 4, on a $P(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leqslant 3)$, ce qui donne :

$$\boxed{P(Z_k = 4) = \frac{4^k - 4 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k - 4}{4^k}}$$